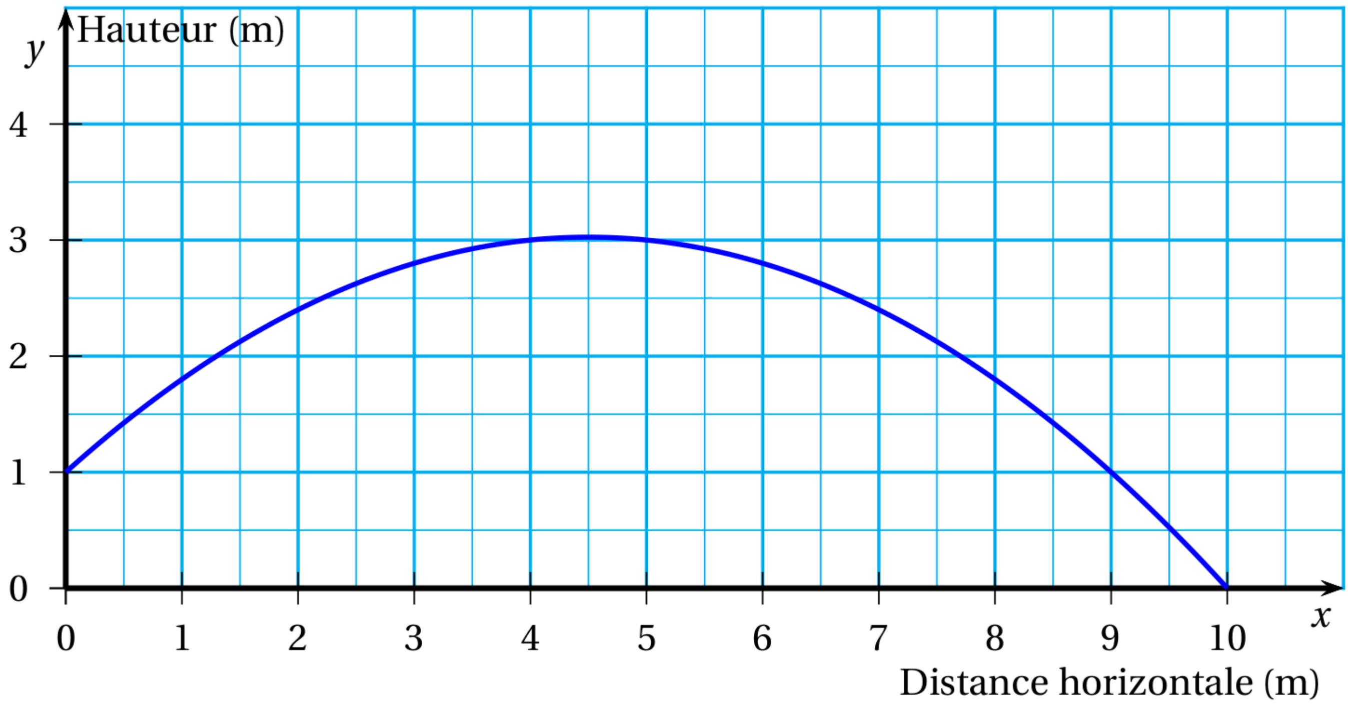
Correction

Soigner la rédaction des explications et des réponses : la qualité de cette rédaction et la maîtrise de la langue sont notées sur 4 points.
Les 8 exercices sont notés sur un total de 36. La calculatrice est autorisée.

Durée de l'épreuve : 2h.

Exercice 1 *(7 points)*

Pour son anniversaire, Julien a reçu un coffret de tir à l'arc.
Il tire une flèche. La trajectoire de la pointe de cette flèche est représentée ci-dessous.
La courbe, qui représente la fonction f définie par $f(x) = -0,1x^2 + 0,9x + 1$, donne la hauteur en fonction de la distance horizontale parcourue par la flèche.



Pour les trois premières questions, les réponses seront données grâce à des lectures graphiques. Aucune justification n'est attendue sur la copie.

1) De quelle hauteur la flèche est-elle tirée ?

La flèche a été tirée d'une hauteur de 1 m.

2) À quelle distance de Julien la flèche retombe-t-elle au sol ?

La flèche retombe au sol à 10 m de Julien.

3) Quelle est la hauteur maximale atteinte par la flèche ?

La hauteur maximale atteinte par la flèche est d'un peu plus de 3m.

4) Pour les questions suivantes, on écrira le détail des calculs :

a) Calculer $f(5)$. $f(5)=-0,1\times5^2+0,9\times5+1=-0,1\times25+4,5+1=-2,5+5,5=\boxed{3}$.

b) Calculer $f(4,5)$.

$f(4,5)=-0,1\times4,5^2+0,9\times4,5+1=-0,1\times20,25+4,05+1=-2,025+5,5=\boxed{3,025}$

c) Comparer avec le résultat du **3.** et conclure.

Le calcul confirme l'observation du 3) : la flèche atteint une hauteur supérieur à 3m.

5) Montrer que $f(x)=-0,1(x-4,5)^2+3,025$

Je développe à l'aide de la 2^e identité remarquable (carré d'une différence) :

$$-0,1(x-4,5)^2+3,025 \quad =-0,1(x^2-2\times x\times4,5+4,5^2)+3,025$$

Je réduis dans la parenthèse : $=-0,1(x^2-9x+20,25)+3,025$

Je développe et je réduis : $=-0,1x^2+0,9x-2,025+3,025$

$=-0,1x^2+0,9x+1$

On reconnaît l'expression de $f(x)$. J'en déduis que $\boxed{f(x)=-0,1(x-4,5)^2+3,025}$.

Exercice 2 *(2 points)* ***Justifier.***

On considère un cube de 8 cm de côté et une boule de 5 cm de rayon.
Lequel de ces deux solides a le plus grand volume ?

Je calcule le volume du cube à l'aide de la formule : $V_{cube}=c^3=8^3=\boxed{512\text{ cm}^3}$

Je calcule le volume de la boule à l'aide de la formule :

$$V_{boule}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times5^3=\frac{500}{3}\pi\ \boxed{\approx523,6\text{ cm}^3}$$

Je compare : le volume de la sphère est le plus grand, de 11,6 cm^3 environ.

Exercice 3 *(3 points)* Recopier et compléter chaque phrase en choisissant la bonne réponse parmi les trois proposées dans ce tableau :

A	$\frac{1}{6}+\frac{1}{9}$ est égal à	$\frac{2}{15}$	$0,277$	$\frac{5}{18}$
B	$1-\frac{3}{2}\times\frac{2}{9}$ est égal à	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{5}{18}$
C	$(1+2)^2$ est égal à	1^2+2^2	1^3+2^3	6
D	Pour tout nombre x, $(2x-3)^2$ est égal à	$2x^2-12x+9$	$4x^2-9$	$4x^2-12x+9$
E	Le carré d'un entier est toujours	positif	pair	divisible par 4
F	49 et 91 sont	premiers	des diviseurs de 4459	premiers entre eux

A : $\frac{1}{6}+\frac{1}{9}$ est égal à $\boxed{\frac{5}{18}}$ car $\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{1\times3}{6\times3}+\frac{1\times2}{9\times2}=\frac{3}{18}+\frac{2}{18}=\frac{5}{18}$.

B : $1-\frac{3}{2}\times\frac{2}{9}$ est égal à $\boxed{\frac{2}{3}}$ car $1-\frac{3}{2}\times\frac{2}{9}=1-\frac{3\times2}{2\times3\times3}=1-\frac{1}{3}=\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

C : $(1+2)^2$ est égal à $\boxed{1^3+2^3}$ car $(1+2)^2=3^2=9$ et $1^3+2^2=1+8=9$.

D : Pour tout x, $(2x-3)^2$ est égal à $\boxed{4x^2-12x+9}$ car

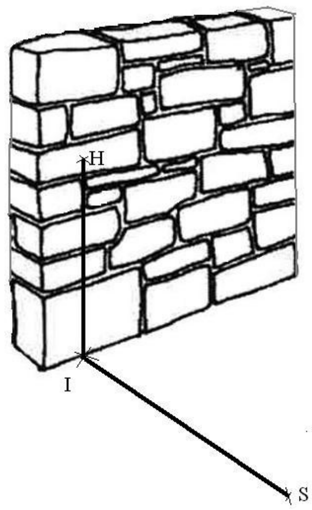
$(2-3x)^2=(2x)^2-2\times2x\times3+3^2=4x^2-12x+9$

E : Le carré d'un entier est <u>toujours positif</u>.

F : $49=7\times7$ et $91=7\times13$ donc 49 et 91 ne sont, ni premiers, ni premiers entre eux.

Il ne reste que la dernière possibilité : 49 et 91 sont $\boxed{\text{des diviseurs de } 4\,459}$ $(4\,459=91\times49)$.

Exercice 4 *(4 points)*



Au lycée professionnel, Jacques et Patrick, futurs maçons, s'entraînent en construisant un mur chacun.
Leur professeur M. Ecker vient vérifier si chaque mur est bien « droit », c'est-à-dire perpendiculaire au sol.
Ayant oublié sa caisse à outils dans son atelier, il ne possède que le mètre ruban qu'il avait dans sa poche.
Pour chacun des murs, M. Ecker place au pied du mur un point I, un point H à 60 cm de hauteur sur le mur et un autre point S au sol à 80 cm de I, puis il mesure la longueur HS.
Pour le mur de Jacques il trouve 1m et pour celui de Patrick 95 cm.

1) Le mur de Jacques est-t-il « droit » ? Détailler le raisonnement.

Je convertis 1 m en 100 cm.

Je calcule : $HS^2 = 100^2 = 10\,000$
et $HI^2 + IS^2 = 60^2 + 80^2 = 3\,600 + 6\,400 = 10\,000$

Je constate que $HS^2 = HI^2 + IS^2$

L'égalité de Pythagore est vérifiée, donc le triangle HIS est rectangle en I.
Le mur forme un angle droit avec le sol, **il est bien « droit »**.

2) Et celui de Patrick ? Justifier.

Je calcule : $HS^2 = 95^2 = 9\,025$
et $HI^2 + IS^2 = 60^2 + 80^2 = 3\,600 + 6\,400 = 10\,000$

Je constate que $HS^2 \neq HI^2 + IS^2$

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, donc le triangle HIS n'est pas rectangle en I.
Le mur ne forme pas un angle droit avec le sol, **il n'est pas « droit »**.

<u>Exercice 5</u> *(5 points)* ***<u>Toutes les réponses doivent être justifiées.</u>***

Juliette veut répartir la totalité de 1360 nougats et 765 bonbons dans des sachets qui seront tous composés de façon identique.

1) Peut-elle faire 17 sachets ? Avec quelle composition ?

17 est un diviseur de 1360 car $1360 = 17 \times 80$ et 17 est un diviseur de 765 car $765 = 17 \times 45$ donc 17 est un diviseur commun de 1360 et 765.

J'en conclus que l'on peut réaliser <u>17 sachets, composés de 80 nougats et 45 bonbons</u>.

2) Quel nombre maximal de sachets peut-elle réaliser ?

Le nombre maximal de sachets doit être un diviseur commun du nombre de nougats et du nombre de bonbons, le plus grand possible. Je calcule donc le PGCD de 1360 et 765.

J'utilise l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 1360 &= 765 \times 1 + 595 \\ 765 &= 595 \times 1 + 170 \\ 595 &= 170 \times 3 + 85 \\ 170 &= 85 \times 2 + 0 \end{aligned}$$

Le dernier reste non nul est 85, donc PGCD (1360 ; 765) = 85.

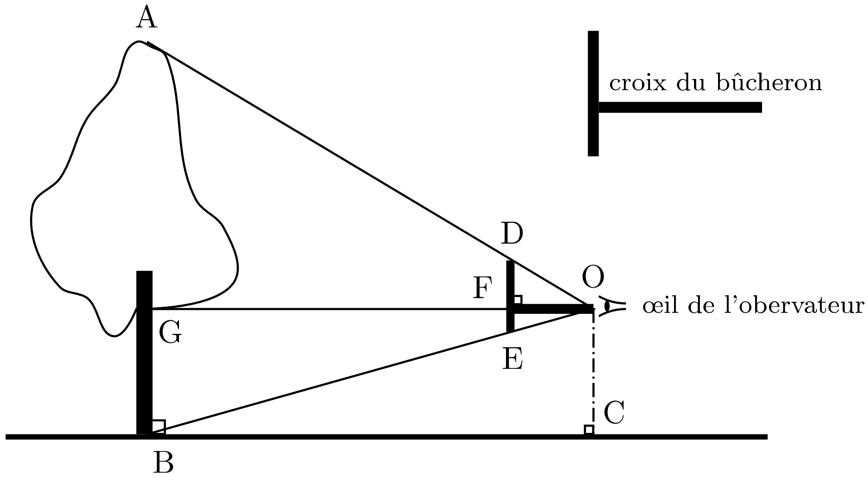
<u>Elle peut donc réaliser, au maximum, 85 sachets</u>.

3) Combien de nougats et de bonbons y aura-t-il dans chaque sachet ?

Chaque sachet contiendra $\frac{1360}{85} = \boxed{16}$ nougats et $\frac{765}{85} = \boxed{9}$ bonbons.

Exercice 6 *(5 points)* *Croix du bûcheron*

Julien veut mesurer un jeune chêne avec une croix de bûcheron comme le montre le schéma ci-dessous.



DE = 20 cm
OF = 35 cm
BC = 770 cm

Il place la croix de sorte que O, D et A d'une part et O, E et B d'autre part soient alignés.
Il sait que DE = 20 cm et OF = 35 cm. Il place [DE] verticalement et [OF] horizontalement.
Il mesure au sol BC = 7,7 m.

1) Le triangle ABO est un agrandissement du triangle DEO. Justifier que le coefficient d'agrandissement est 22.

Le rapport d'agrandissement est $\dfrac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OF}} = \dfrac{770}{35} = \boxed{22}$.

2) Calculer la hauteur de l'arbre en mètres.

La hauteur de l'arbre est égale à BA. On sait que [BA] est un agrandissement de [DE], de rapport 22, donc $\mathrm{BA} = 22 \times \mathrm{DE} = 22 \times 20 = 440$ cm. L'arbre a une hauteur de $\boxed{4{,}4\text{ m}}$.

3) Certaines croix sont telles que DE = OF. Quel avantage apporte ce type de croix ?

> L'avantage si DE = OF est qu'alors la hauteur AB de l'arbre est exactement égale à la distance BC entre l'observateur et l'arbre et il n'y a donc plus de calcul à faire.

Justification : On a établi au **1)** que le rapport d'agrandissement est $\dfrac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OF}}$. Or ce rapport vaut aussi $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{DE}}$, donc on a : $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{DE}} = \dfrac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OF}}$. Si DE = OF, alors AB = OG, et comme OG = BC, cela entraîne que AB = BC.

4) Julien enroule une corde autour du tronc de l'arbre à 1,5 m du sol. Il mesure ainsi une circonférence de 138 cm.
Quel est le diamètre de cet arbre à cette hauteur ? Donner un arrondi au centimètre près.

Rappel de la formule du périmètre d'un cercle : $P_{cercle} = 2\pi R$.

Je remplace : $2\pi R = 138$ donc $R = \dfrac{138}{2\pi} \approx 21{,}963$ cm.

Le diamètre est donc environ $2 \times 21{,}963 = 43{,}926$ cm ce qui fait, au cm près, environ $\boxed{44\text{ cm}}$.

Exercice 7 *(4 points)*

Pour choisir un écran de télévision, d'ordinateur ou une tablette tactile, on peut s'intéresser :

- à son format, $\frac{L}{l}$, qui est le rapport (longueur de l'écran) sur (largeur de l'écran) ;
- à sa diagonale, qui se mesure en pouces. Un pouce vaut environ 2,54 cm ;

1) Un écran de télévision a une longueur de 80 cm et une largeur de 45 cm.
S'agit-il d'un écran de format $\frac{4}{3}$ ou $\frac{16}{9}$?

Il s'agit d'un format 16/9[e] car quand je simplifie la fraction, j'obtiens $\frac{80}{45} = \frac{16 \times 5}{9 \times 5} = \frac{16}{9}$.

2) Un écran est vendu avec la mention « 15 pouces ». On prend les mesures suivantes : la longueur est 30,5 cm et la largeur est 22,9 cm.
La mention « 15 pouces » est-elle bien adaptée à cet écran ?

Un écran est un rectangle et la diagonale [DB] le partage en deux triangles rectangles donc je peux utiliser la propriété de Pythagore pour déterminer la longueur de cette diagonale.

$\mathrm{DB}^2 = \mathrm{DA}^2 + \mathrm{AB}^2 = 22,9^2 + 30,5^2 = 524,41 + 930,25 = 1454,66$

Donc $\mathrm{DB} = \sqrt{1454,66} \approx 38,14$ cm. Je convertis en pouces : $\mathrm{DB} \approx \frac{38,14}{2,54} \approx 15,02''$.

On peut raisonnablement considérer que cet écran est un 15''.

3) Une tablette tactile a un écran de diagonale 7 pouces et un format $\frac{4}{3}$.
Sa longueur étant égale à 14,3 cm, calculer sa largeur, arrondie au mm près.

Je calcule la largeur en utilisant le rapport de $\frac{4}{3}$: $\mathrm{L} = \frac{4}{3} \times l$.

Je remplace : $14,3 = \frac{4}{3} \times l$ donc $l = \frac{14,3}{\frac{4}{3}} = 14,3 \times \frac{3}{4} = \frac{42,9}{4} = 10,725$.

La largeur de l'écran est de 10,7 cm au mm près.

Exercice 8 *(6 points)*

Pour préparer un séjour d'une semaine à Naples, un couple habitant Nantes a constaté que le tarif des billets d'avion aller-retour Nantes-Naples était beaucoup plus élevé que celui des billets Paris-Naples. Il étudie donc quel serait le coût d'un trajet aller-retour Nantes-Paris pour savoir s'il doit effectuer son voyage en avion à partir de Nantes ou à partir de Paris.
Voici les informations que ce couple a relevées :

Information 1 : Prix et horaires des billets d'avion.

Vol aller-retour au départ de Nantes

Départ de Nantes le	23/11/2014 :	06 h 35
Arrivée à Naples le	23/11/2014 :	09 h 50
Départ de Naples le	30/11/2014 :	12 h 50
Arrivée à Nantes le	30/11/2014 :	16 h 25

Prix par personne du vol aller-retour : 530 €

Vol aller-retour au départ de Paris

Départ de Paris le	23/11/2014 :	11 h 55
Arrivée à Naples le	23/11/2014 :	14 h 10
Départ de Naples le	30/11/2014 :	13 h 10
Arrivée à Paris le	30/11/2014 :	15 h 30

Prix par personne du vol aller-retour : 350 €

Les passagers doivent être présents 2 heures avant le décollage pour procéder à l'embarquement.

Information 2 : Prix et horaires des trains pour un passager

Trajet Nantes - Paris (Aéroport)	23 novembre	Trajet Paris (Aéroport) - Nantes	30 novembre
Départ	06 h22	Départ	18 h 20
Prix	51,00 €	Prix	42,00 €
Durée	03 h 16 direct	Durée	03 h 19 direct
Voyagez avec	TGV	Voyagez avec	TGV

Information 3 : Trajet en voiture

Consommation moyenne : 6 litres aux 100 km
Péage Nantes-Paris : 35,90 €
Distance domicile-aéroport de Paris : 409 km
Carburant : 1,30 € par litre
Temps estimé : 4 h 24 min

Information 4 :
Parking de l'aéroport de Paris

Tarif : 58 € pour une semaine

1) Expliquer pourquoi la différence entre les prix des 2 billets d'avion s'élève à 360 € pour ce couple.

Prix des billets depuis Nantes : 2 aller-retours à 530 € font $2 \times 530 = 1060$ €.
Prix des billets depuis Paris : 2 aller-retours à 350 € font $2 \times 350 = 700$ €.

La différence de prix est de 1060 – 700 = 360 €.

2) Si le couple prend la voiture pour aller à l'aéroport de Paris :

a) Déterminer l'heure avant laquelle il doit partir de Nantes.

Pour être présents 2 h avant le décollage, les passagers doivent être à l'aéroport à 9 h 55min.
En comptant les 4 h 24 min de trajet, il faut partir à (9 h 55 – 4 h 24) = 5 h 31 min.

b) Montrer que le coût du carburant pour cet aller est de 31,90 €.

Pour faire 409 km en consommant 6 L aux 100 km, la consommation totale est de 24,54 L.
$(6 \times \frac{409}{100} = 6 \times 4{,}09 = 24{,}54)$
Au prix de 1,30 € par litre, le carburant coûtera $24{,}54 \times 1{,}3 = 31{,}902$ soit 31,90 €.

3) Quelle est l'organisation de voyage la plus économique ?

- Prix du trajet en avion depuis Nantes : 1060,00 € (voir ci-dessus).

  - Prix du trajet en avion depuis Paris en prenant le train :
    Prix des billets d'avion : 700 € (voir ci-dessus)
    Prix des billets de train : $2 \times 51 + 2 \times 42 = 186$ € Total : 700+186=886,00 €

  - Prix du trajet en avion depuis Paris en prenant la voiture :
    Prix des billets d'avion : 700 € (voir ci-dessus)
    Prix du carburant : $31{,}90 \times 2 = 63{,}80$ € (voir ci-dessus)
    Prix du péage : $35{,}9 \times 2 = 71{,}80$ €
    Prix du parking : plus de 58,00 € car la durée de stationnement dépasse la semaine.

    Total : 700 + 63,8 + 71,8 + 58 = 907,4 plus de 907,40 €

Conclusion : À 886,00 €, le trajet en avion depuis Paris en prenant le train est le plus économique.